Módulos de matemáticas

Aprendizaje paso a paso

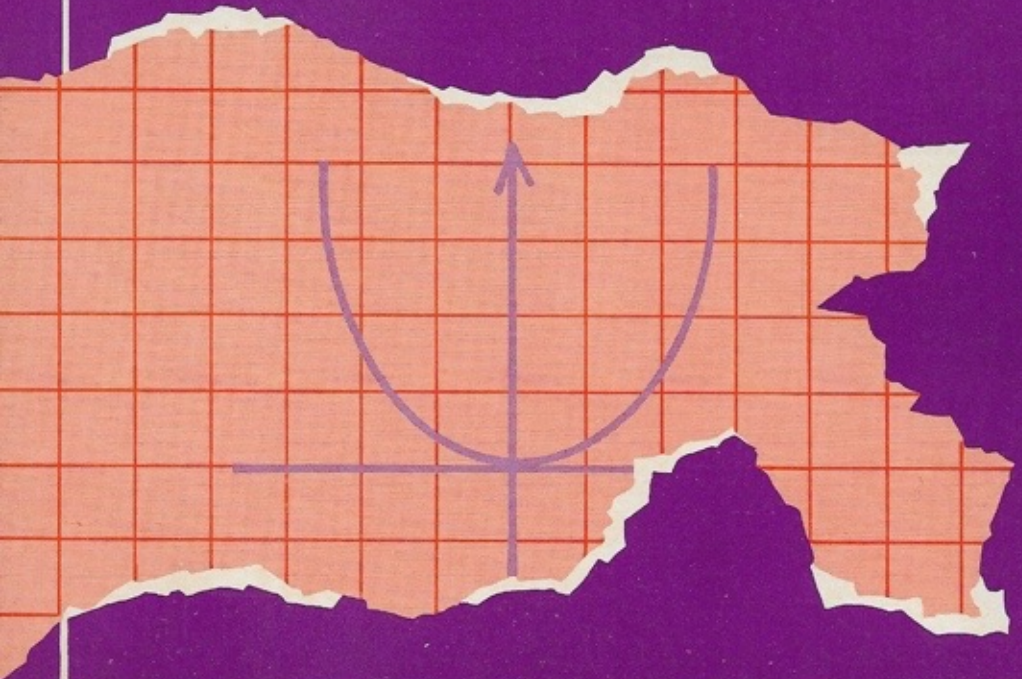
Bloque 6

Geometría analítica

Módulo 6

LA PARÁBOLA

Conrado Flores García



trillas

SERIE MÓDULOS DE MATEMÁTICAS

Conrado Flores García

A través del tiempo y en todos los niveles de aprendizaje, los estudiantes han considerado a las matemáticas como un escollo insalvable. Aun cuando se han establecido nuevos enfoques pedagógicos para la enseñanza de esta materia, casi siempre los educandos enfrentan su estudio con verdadero temor, debido al prejuicio generalizado sobre la supuesta dificultad de esta asignatura.

La serie *Módulos de matemáticas*, a la cual pertenece el presente texto, es un valioso auxiliar con el que puede abordarse sencilla y eficazmente el proceso de enseñanza-aprendizaje de este campo de conocimiento.

Es necesario destacar que los *Módulos de matemáticas* constituyen un método de *aprendizaje paso a paso*, ya que la información se presenta por medio de cuadros didácticos (informativos, de preguntas y de respuestas), que están organizados en orden creciente de complejidad. De este modo, se conduce *paso a paso* al lector desde los conceptos más elementales, como los de conjunto y elemento, hasta los más complejos de cálculo integral, pasando por aquéllos del álgebra (estructuras, operaciones y modelos), de la lógica matemática, de la geometría euclidiana, de la trigonometría, de la geometría analítica y del cálculo diferencial.

Mediante este novedoso sistema, más ágil y motivador que el de la enseñanza programada, se facilita tanto la exposición de los temas como la comprensión y asimilación de los mismos.

El autor revisa el panorama matemático fundamental a lo largo de los 64 módulos que, agrupados en 8 bloques, constituyen la serie. Además, cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos denominado *Memo*.

Los profesores de enseñanza secundaria, de preparatoria y de universidad pueden emplear los *Módulos de matemáticas* como parte integrante de sus guiones didácticos y los estudiantes tienen la posibilidad de incorporarse como material complementario y de apoyo a las experiencias adquiridas en el aula. Asimismo, estos libros son útiles para las personas que quieran actualizar o bien repasar, sus conocimientos en esta área o para quienes deseen iniciar un aprendizaje autodidáctico por la imposibilidad de asistir a una institución educativa.

Esperamos que al estudiar los Módulos de matemáticas, los alumnos se den cuenta de que esa fortaleza defendida por ejércitos de números, símbolos y fórmulas, aparentemente inexpugnable, puede ser alcanzada por cualquier persona decidida y tesonera.

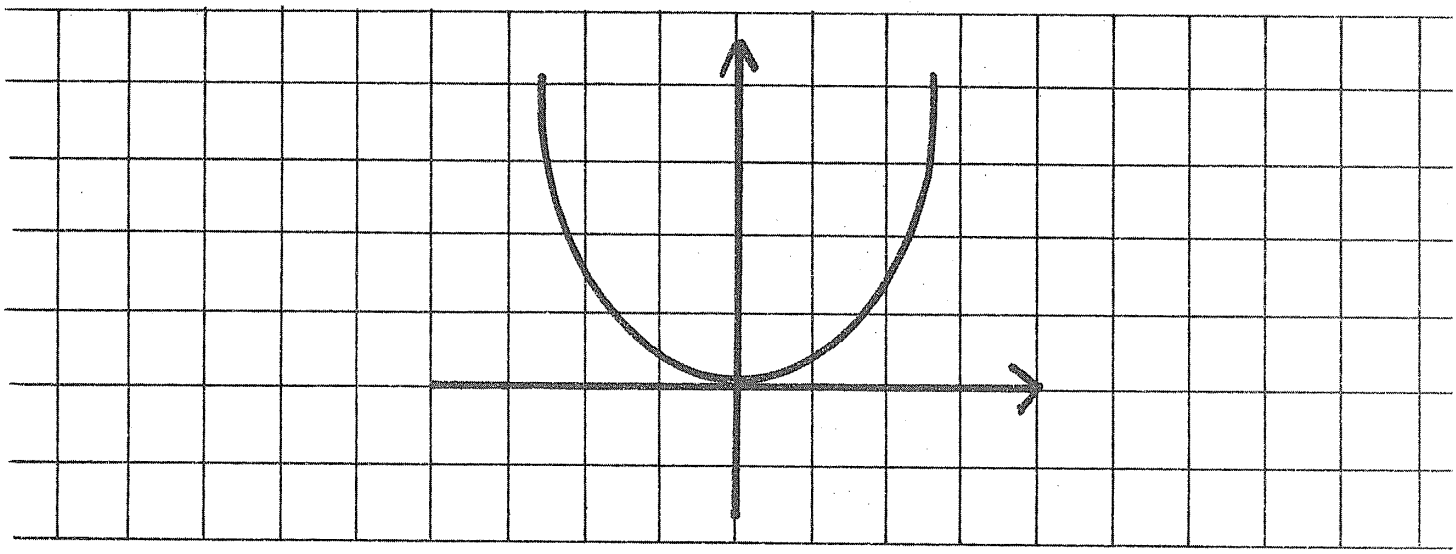
LA PARÁBOLA

Obras que integran el bloque 6 *(Geometría analítica):*

1. Introducción a la geometría analítica
2. La recta
3. La circunferencia
4. La elipse
5. La hipérbola
6. ***La parábola***
7. Las cónicas y la ecuación general de segundo grado
8. Relaciones y lugares geométricos.

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 6
Geometría analítica

Módulo 6

LA PARÁBOLA

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS
México, Argentina, Colombia, España, Venezuela.

La presentación y disposición en conjunto de
LA PARÁBOLA
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, julio 1984
ISBN 968-24-0837-7

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

6.1 Elementos de una parábola 9

6.2 Ecuaciones de una parábola con vértice en el origen 18

6.3 Ecuación de una parábola con vértice en un punto cualquiera 31

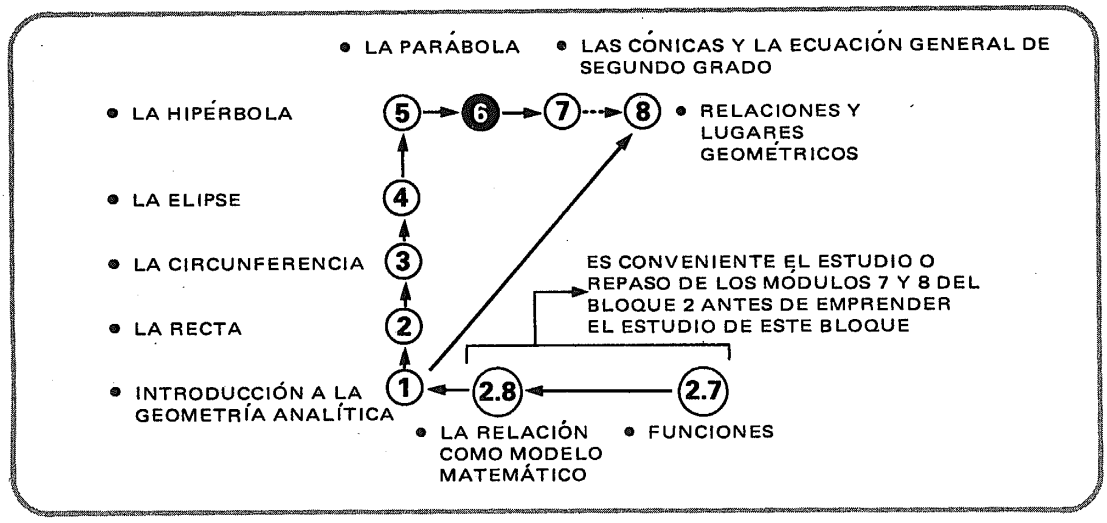
6.4 Ecuación general de una parábola 48

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 6. Geometría analítica

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico representado por una relación cuya regla de correspondencia es una ecuación lineal, una ecuación cuadrática, o bien, una ecuación, una desigualdad, un sistema de ecuaciones o de desigualdades cualesquiera

Esquema estructural del bloque 6



Módulo 6. La parábola

Objetivos: caracterizar en el plano cartesiano el lugar geométrico llamado parábola

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Los números complejos (concepto y manejo)	1	14
• Resolución de ecuaciones de primer y segundo grados	2	2, 5
• Resolución de sistemas de ecuaciones	2	3, 11
• Propiedades geométricas de ángulos, triángulos y demás polígonos convexos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6
• Las funciones trigonométricas directas o inversas	5	1, 3, 4, 5
• Algunas identidades trigonométricas	5	6
• La circunferencia	6	3

6.1

Elementos de una parábola

1

Llamamos

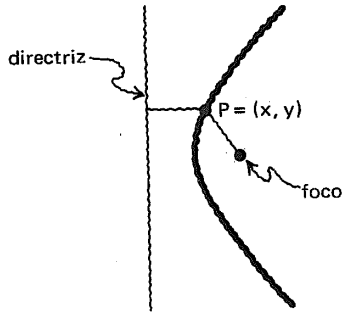
parábola

al conjunto de puntos
en el plano que
equidistan de un
punto fijo llamado

foco

y
de una recta fija llamada

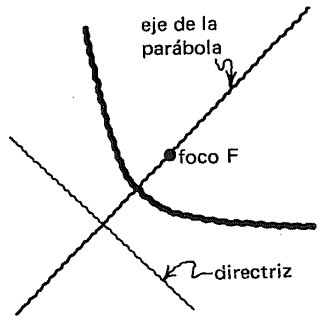
directriz.



2

A la recta
que
pasa por el foco,
y
es perpendicular
a la directriz
la llamaremos
eje focal
o
simplemente

eje de la parábola.

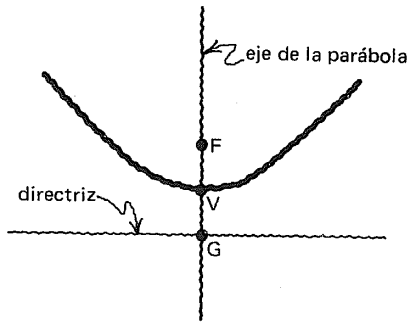


3

Si
G
es la intersección
del eje de la parábola
y la directriz,
y
F
es el foco de la parábola,
al punto medio
del segmento
$\overleftrightarrow{FG}$ le llamaremos

vértice de la parábola

y lo denotaremos con **V.**



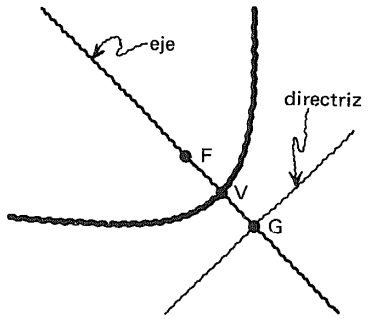
4

Señalar la opción correcta y completar.

Vemos que
el vértice

es/no es

un punto de la
parábola,
porque



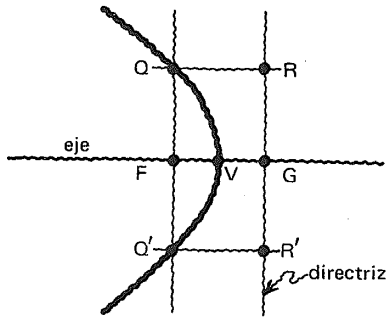
es

cumple con la condición
de equidistar del foco y
de la directriz, ya que
$|\overleftrightarrow{FV}| = |\overleftrightarrow{VG}|$

5

Observemos
con atención
esta figura, en que
$\overleftrightarrow{QQ'} \parallel$ directriz.
Para que los puntos
Q y Q'
estén en la parábola,
se requiere que

$|\overleftrightarrow{FQ}| =$ ____,
$|\overleftrightarrow{FQ'}| =$ ____,



$|\overleftrightarrow{QR}|$ o bien $|\overleftrightarrow{FG}|$
$|\overleftrightarrow{Q'R'}|$ o bien $|\overleftrightarrow{FG}|$

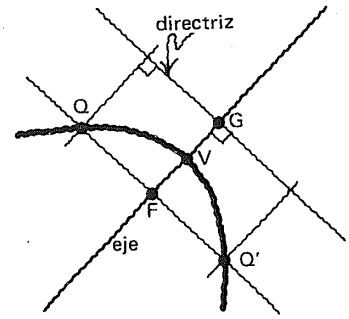
6

Sigamos observando con atención.

Si $p = |\overrightarrow{FV}| = |\overrightarrow{VG}|$

entonces, en términos de p:

$|\overrightarrow{FQ}| =$ ⌊____⌋
$|\overrightarrow{FQ'}| =$ ⌊____⌋
$|\overrightarrow{QQ'}| =$ ⌊____⌋



2p
2p
4p

7

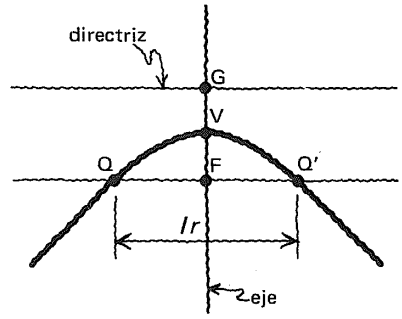
A la cuerda $\overrightarrow{QQ'}$, que contiene al foco y es perpendicular al eje, le llamaremos

lado recto
o
ancho focal,

y la denotaremos con

lr,

como lo hemos hecho para la elipse y para la hipérbola.



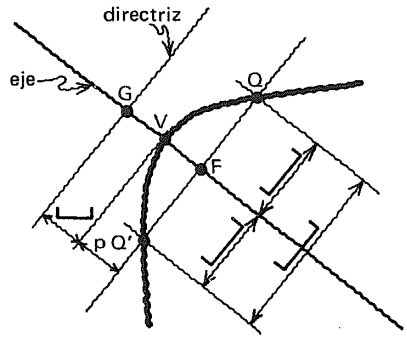
8

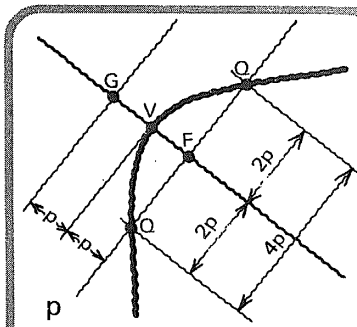
Si
p
es la distancia del vértice al foco, la distancia del vértice a la directriz es

⌊____⌋

El lado recto es

⌊____⌋





p

4p

9

Si la distancia del vértice al foco de una parábola es igual a 2,

- la distancia del vértice a la directriz es igual a ⌊___⌋
- la distancia del foco a la directriz es igual a ⌊___⌋
- el lado recto es igual a ⌊___⌋

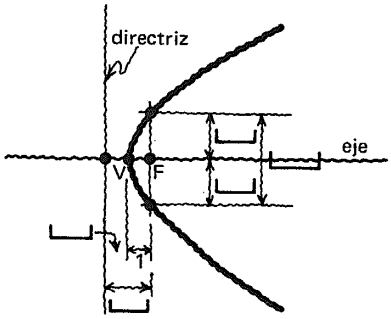
2

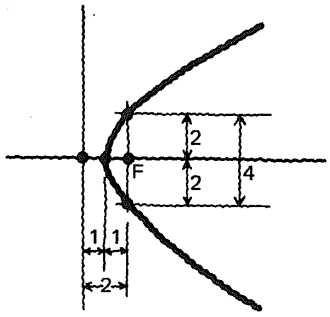
4

8

10

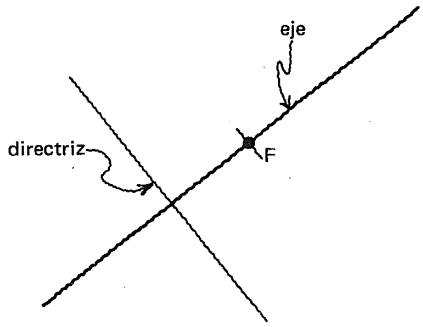
Rotular donde se pide.

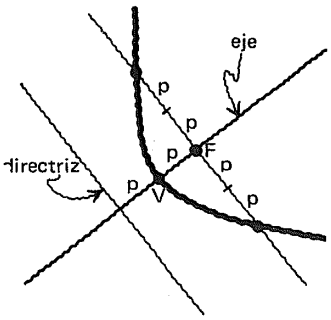




11

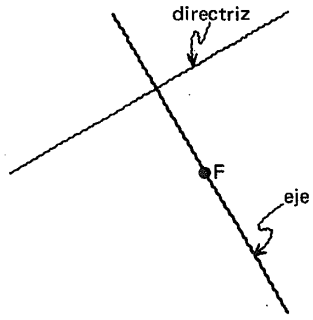
Localizar el vértice y otros dos puntos de la parábola; hacer un trazo aproximado de ésta.

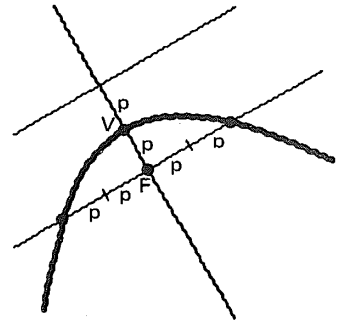




12

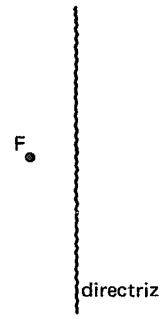
Localizar el vértice
y
otros dos puntos de la parábola;
hacer un trazo
aproximado de ésta.

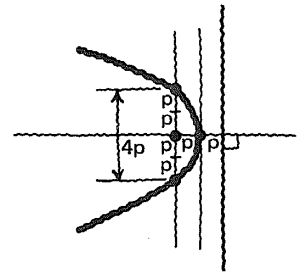




13

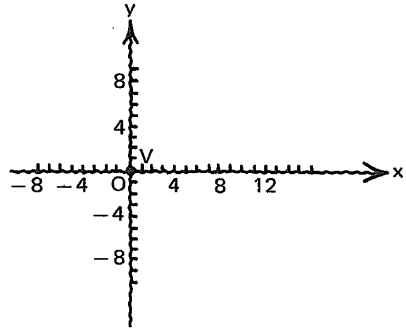
Trazar el eje,
localizar el vértice
y
otros dos puntos de la parábola;
hacer el trazo aproximado de ésta.

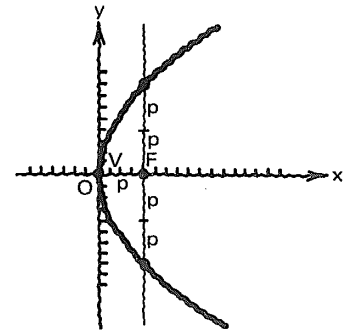




14

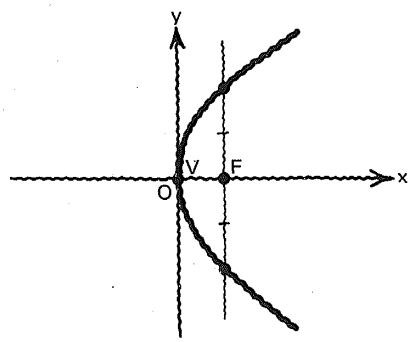
El vértice de una parábola
coincide con el origen,
y
el foco es el punto (4, 0).
Hacer el trazo aproximado
de la parábola.

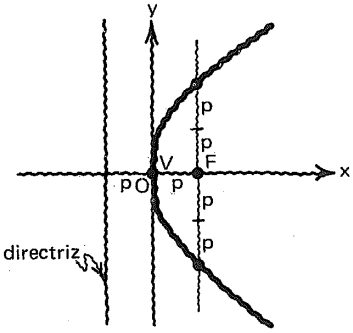




15

Trazar la directriz
de la
parábola representada.





16

Una

ecuación del eje

de la parábola
representada es

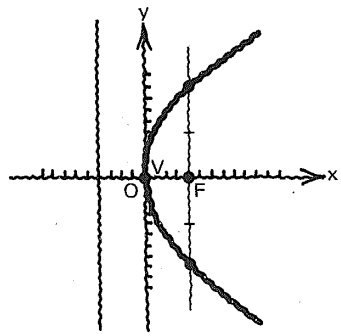
[ ]

Una

ecuación de la directriz

es

[ ]



$y = 0$

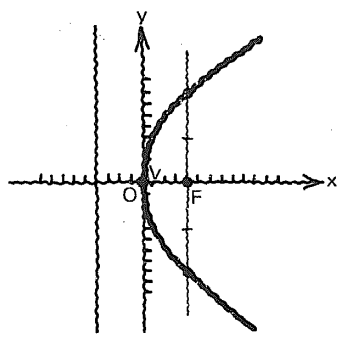
$x = -4$ (ó $x + 4 = 0$)

17

La distancia del vértice
a la directriz es igual a [ ].

La distancia del vértice
al foco es igual a [ ].

El lado recto es igual a [ ].



4

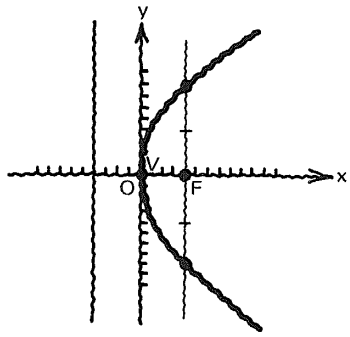
4

16

18

El vértice es el punto
V = [ ]

El foco es el punto
F = [ ]



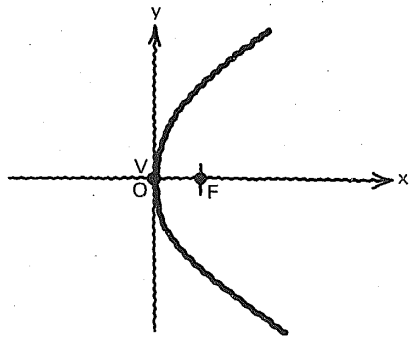
(0,0)

(4, 0)

19

Si el eje de una parábola es paralelo a (o coincide con) el eje de las x, diremos que

la **parábola** es **horizontal.**



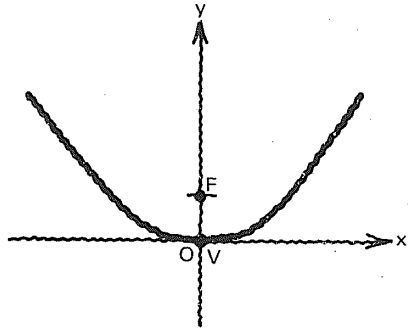
20

Si el eje es paralelo a (o coincide con) el eje de las y, la

parábola

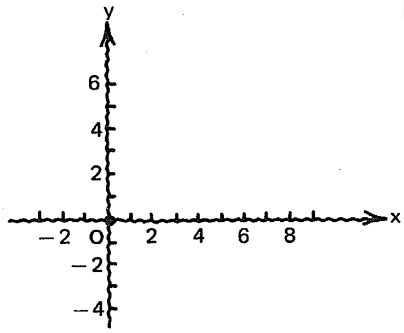
será llamada

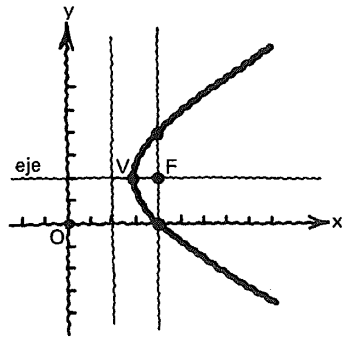
vertical.



21

El vértice de una parábola es el punto V = (3, 2) y el foco el punto F = (4, 2).
Hacer el trazo aproximado de la parábola, y de su directriz

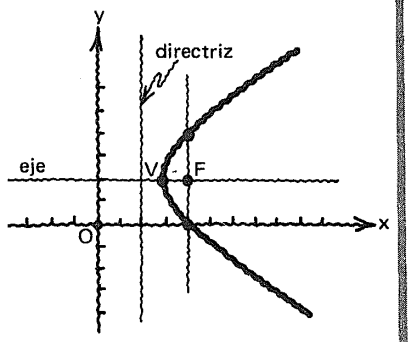




22

Para la parábola representada:

- una ecuación del eje es
  [ ]
- una ecuación de la directriz es
  [ ]
- p = [ ]; • *lr* = [ ];
- la parábola es **vertical/horizontal**



y = 2 (ó y − 2 = 0)

x = 2 (ó x − 2 = 0)

1 4

horizontal

23

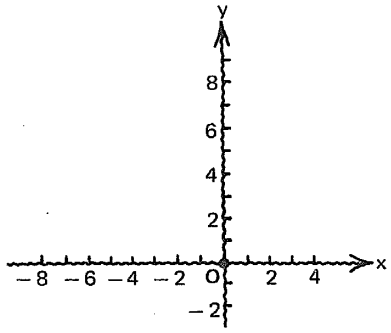
Para una parábola:

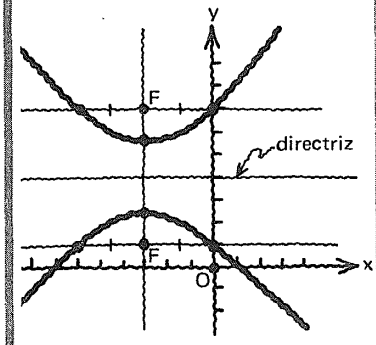
- una ecuación de la directriz es

  y = 4
- una ecuación del eje es:

  x = − 3
- p = $\frac{3}{2}$

Hacer un trazo aproximado de esta parábola.





Dos posibles parábolas que satisfacen las condiciones dadas.

6.6.1.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

6.6.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* una definición de parábola,
- *identificar* los siguientes elementos de una parábola, dada su gráfica cartesiana:

  — vértice
  — foco
  — eje
  — directriz
  — lado recto

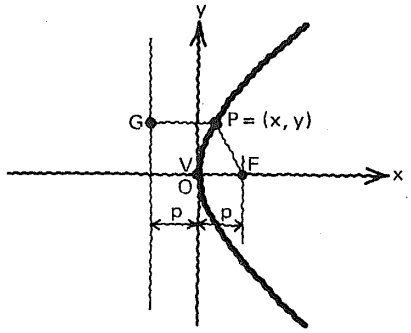
- *trazar* una gráfica aproximada de una parábola, dados algunos de sus elementos.

6.2

Ecuaciones de una parábola
con vértice en el origen

24

Consideremos
una parábola horizontal
con
vértice en el origen.
De acuerdo con la
definición, tenemos,
para un punto cualquiera
P = (x, y), perteneciente
a la parábola:



$|\overleftarrow{GP}| = |\overleftarrow{PF}|$

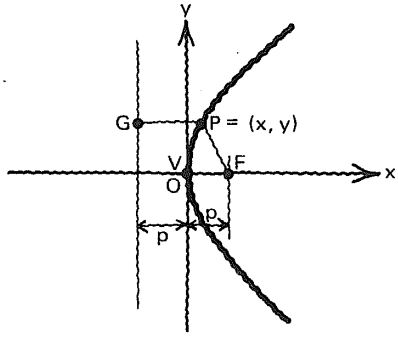
25

$|\overleftarrow{GP}| = |\overleftarrow{PF}|$

G = [ ].

P = [ ].

F = [ ].



(– p, y)

(x, y)

(p, 0)

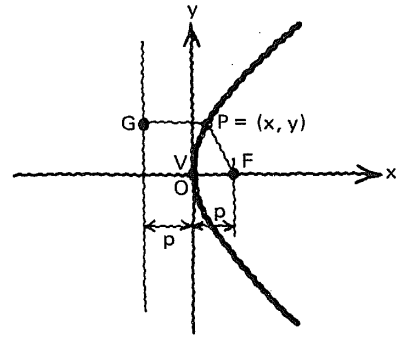
26

$|\overrightarrow{GP}| = |\overrightarrow{PF}|$

$G = (-p, y)$
$P = (x, y)$
$F = (p, 0)$

$|\overrightarrow{GP}| =$ ____

$|\overrightarrow{PF}| =$ ____



$\sqrt{(x+p)^2}$

$\sqrt{(x-p)^2+y^2}$

27

$|\overrightarrow{GP}| = |\overrightarrow{PF}|$ (1)

$|\overrightarrow{GP}| = \sqrt{(x+p)^2}$ (2)

$|\overrightarrow{PF}| = \sqrt{(x-p)^2+y^2}$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1) :

____

$\sqrt{(x+p)^2} = \sqrt{(x-p)^2+y^2}$

28

$$\sqrt{(x+p)^2} = \sqrt{(x-p)^2+y^2}$$

Esta es una ecuación de una parábola horizontal con vértice en el origen.
Intentemos transformarla en otra ecuación más simple.

1. Elevar al cuadrado ambos miembros.

____

$(x+p)^2 = (x-p)^2 + y^2$

29

$$(x + p)^2 = (x - p)^2 + y^2$$

2. Desarrollar los binomios cuadráticos de los dos miembros.

$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$

30

$$x^2 + 2px + p^2 = x^2 - 2px + p^2 + y^2$$

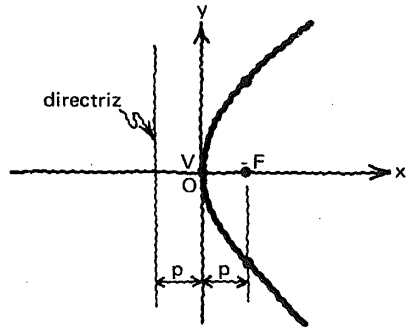
3. Reducir términos semejantes.

$4px = y^2$
ó
$y^2 = 4px$

31

$$y^2 = 4px$$
$$p \in \mathbb{R}^+$$

es una ecuación
de una parábola horizontal
con vértice en el origen
y "abierta a la derecha"

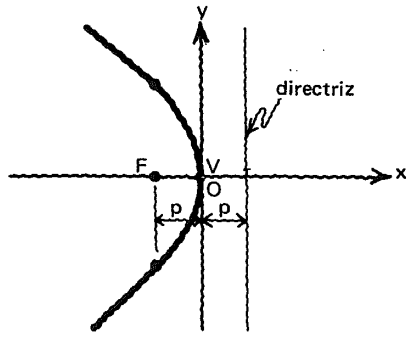


32

Puede demostrarse que

$y^2 = -4px$
$p \in \mathbb{R}^+$

es una ecuación
de una parábola horizontal
con vértice en el origen
y "abierta a la izquierda".

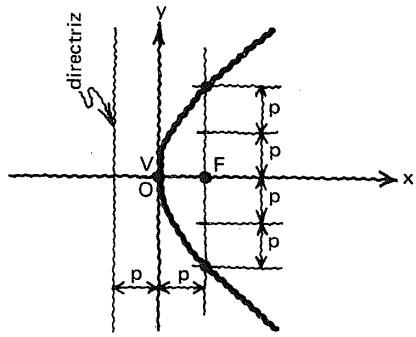


33

Debemos observar que
en las ecuaciones:
$y^2 = 4px$
$p \in \mathbb{R}^+$
y
$y^2 = -4px$
$p \in \mathbb{R}^+$

4p representa el

lado recto
o
ancho focal
de la parábola.



34

Una ecuación de la parábola
representada es:

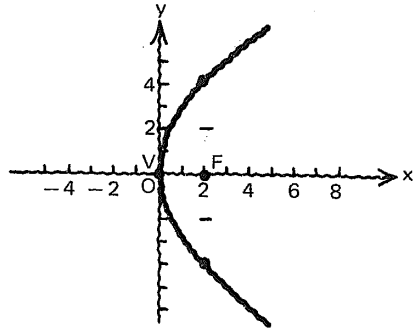
$y^2 = 4px$

expresión general

Datos: $p = 2$

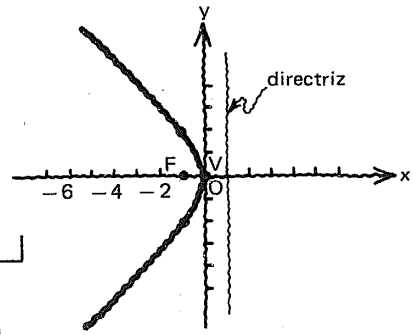
$y^2 = 4(2)x$
o
$y^2 = 8x$

expresión particular



35

Demos una ecuación de la parábola cuya gráfica cartesiana se muestra.



Expresión general: $y^2 = -4px$

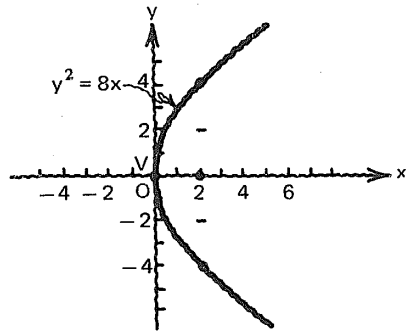
Datos: $p = 1$

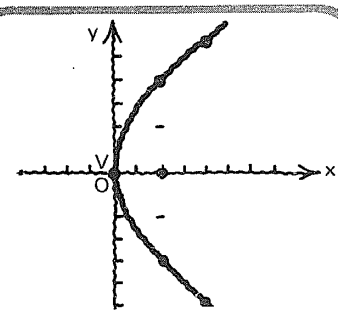
Ecuación requerida: $y^2 = -4x$

36

A manera de verificación: completar la tabla y representar los puntos en el plano cartesiano.

x	$y = \pm\sqrt{8x}$
4	
2	
0	
− 2	



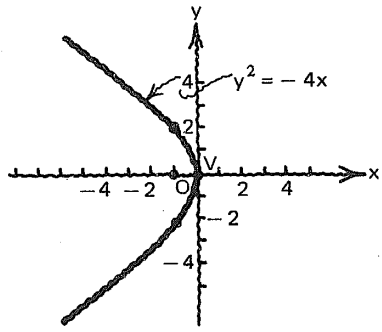


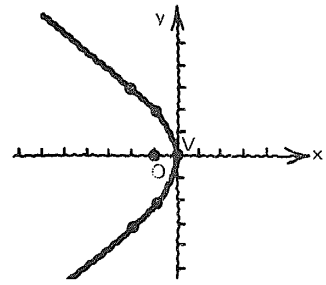
x	$y = \pm\sqrt{8x}$
4	$\pm 4\sqrt{2} \doteq \pm 5.66$
2	± 4
0	0
− 2	no definido

37

A manera de verificación.

x	$y = \pm\sqrt{-4x}$
− 2	
− 1	
0	
1	

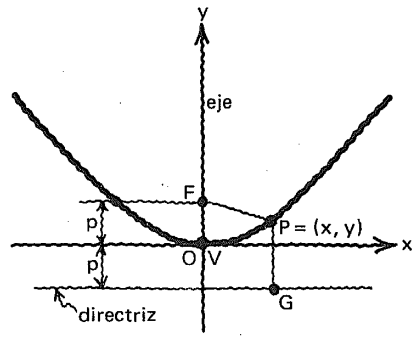




x	$y = \pm\sqrt{-4x}$
− 2	$\pm 2\sqrt{2} \doteq \pm 2.83$
− 1	± 2
0	0
1	no definido

38

Busquemos
ahora
una ecuación
para una
parábola vertical,
con vértice en el origen,
"abierta hacia arriba".
Empezamos escribiendo,
de acuerdo
con la definición:

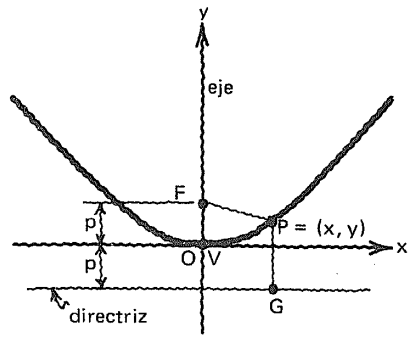


$|\overleftarrow{FP}| = |\overrightarrow{PG}|$

39

$|\overleftarrow{FP}| = |\overrightarrow{PG}|$

Completemos la deducción:



$F = (0, p)$
$P = (x, y)$
$G = (x, -p)$

$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y+p)^2}$

$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$

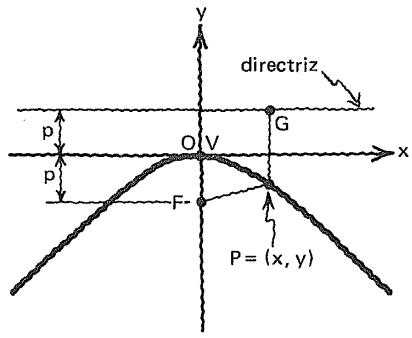
$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$

$\downarrow$

- $x^2 = 4py$

40

Ahora,
para una parábola vertical
con vértice en el origen
"abierta hacia abajo".



$|\overleftarrow{FP}| = |\overrightarrow{PG}|$
$F = (0, -p)$
$P = (x, y)$
$G = (x, p)$

$\sqrt{x^2 + (y+p)^2} = \sqrt{(y-p)^2}$
$x^2 + (y+p)^2 = (y-p)^2$

$x^2 + \cancel{y^2} + 2py + \cancel{p^2} =$
$\cancel{y^2} - 2py + \cancel{p^2}$

$\downarrow$

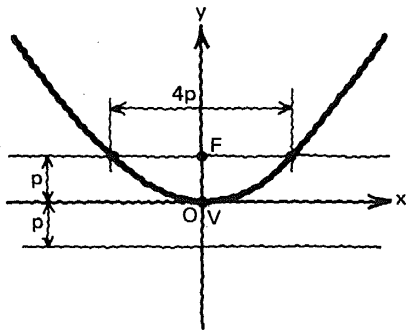
- $x^2 = -4py$

41

Entonces
una ecuación de una
parábola vertical,
"abierta hacia arriba":
con vértice en el origen es:

$x^2 = 4py$

$p \in \mathbb{R}^+$

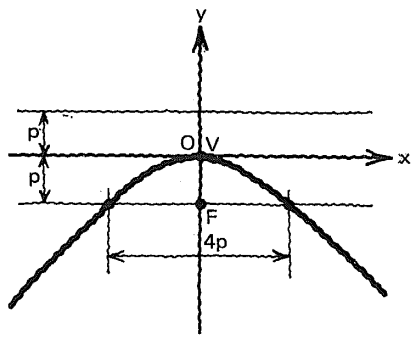


42

Una ecuación de una
parábola vertical
"abierta hacia abajo"
con
vértice en el origen es:

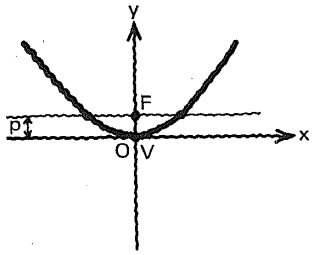
$x^2 = -4py$

$p \in \mathbb{R}^+$

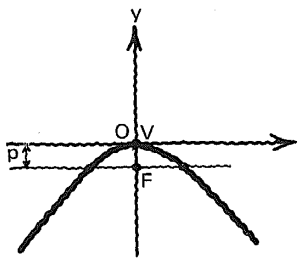


43

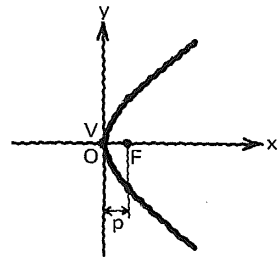
Resumiendo.



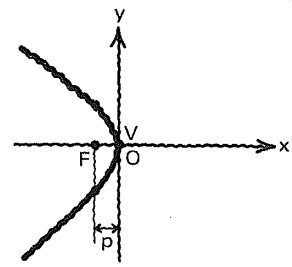
• $x^2 = 4py$



• $x^2 = -4py$



• $y^2 = -4px$



• $y^2 = 4px$

$p \in \mathbb{R}^+$

44

Se requiere una ecuación
de la parábola con vértice en el origen
y foco $F = (0, \frac{3}{4})$.
También necesitamos:

- una ecuación del eje
- una ecuación de la directriz
- lado recto
- la gráfica cartesiana de la parábola

45

Señalar la opción correcta.

La parábola es

horizontal
- abierta hacia la derecha ⌊__⌋
- abierta hacia la izquierda ⌊__⌋

vertical
- abierta hacia arriba ⌊__⌋
- abierta hacia abajo ⌊__⌋

vertical
abierta hacia arriba

46

Expresión general
de la
ecuación buscada:

⌊_____⌋

$x^2 = 4py$

47

$x^2 = 4py$

$p =$ ⌊____⌋

por lo tanto:

⌊_____⌋

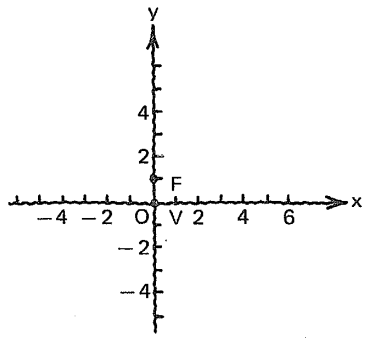
$\frac{3}{4}$

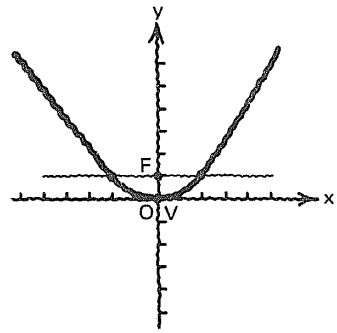
$x^2 = 3y$

48

Gráfica cartesiana de

$x^2 = 3y.$





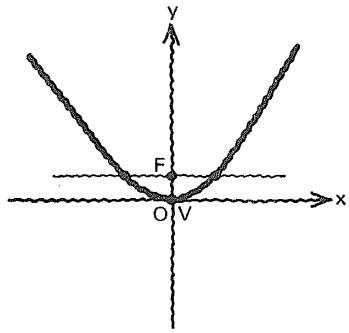
49

Una ecuación del eje de la parábola

⌊_____⌋

Una ecuación de la directriz

⌊_____⌋



$x = 0$

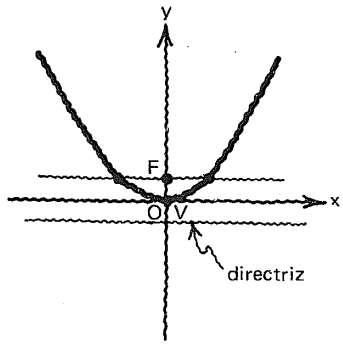
$y = -\frac{3}{4}$

50

Lado recto:

$lr = \square = \square$

↑ expresión general



$4p = 4\left(\frac{3}{4}\right) = 3$

6.6.2.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

51

Se requiere para la parábola

$$x^2 + 10y = 0$$

- su gráfica cartesiana
- el vértice
- el foco
- una ecuación del eje
- una ecuación de la directriz
- el lado recto

52

Empezamos por escribir la ecuación

$x^2 + 10y = 0$

en la forma

$x^2 = \pm 4py.$

$x^2 = -10y$
ó $x^2 = -4\left(\frac{10}{4}\right)y$
ó $x^2 = -4\left(\frac{5}{2}\right)y$

53

$x^2 + 10y = 0$

Escriba esta ecuación en alguna de las formas

$x^2 = -10y$
o
$x^2 = -4\left(\frac{5}{2}\right)y$

sabemos que $p =$ ☐,

y representa: ☐ o ☐

- $\frac{5}{2}$
- la distancia (no dirigida) del vértice al foco
- la distancia (no dirigida) del vértice a la directriz

54

Señalar la opción correcta.
Cualquiera de las ecuaciones

$x^2 + 10y = 0$
$x^2 = -10y$
$x^2 = -4\left(\frac{5}{2}\right)y$

representa una parábola

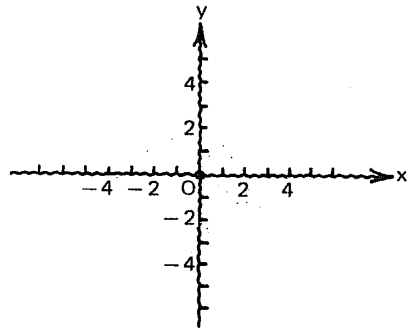
horizontal: abierta a la derecha. ☐ / abierta a la izquierda. ☐

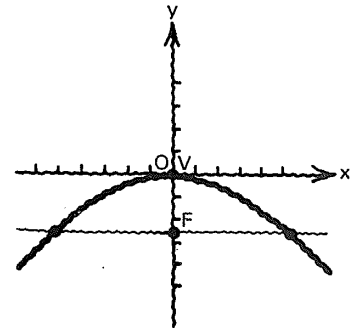
vertical: abierta hacia arriba. ☐ / abierta hacia abajo. ☐

vertical abierta hacia abajo

55

Con tal información estamos en condiciones de hacer un trazo de la gráfica cartesiana de la parábola.





56

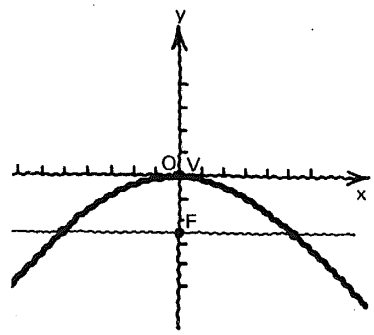
Vértice V = ____

Foco F = ____

Una ecuación del eje: ____

Una ecuación de la directriz: ____

Lado recto = ____



$(0, 0)$

$\left(0, -\frac{5}{2}\right)$

$x = 0$

$y = \frac{5}{2}$

(ó $y - \frac{5}{2} = 0$ ó $2y - 5 = 0$)

$4\left(\frac{5}{2}\right) = 10$

6.6.2.2

Práctica adicional, si se considera necesario.

6.6.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* las ecuaciones: $y^2 = \pm 4px$ y $x^2 = \pm 4py$, correpondientes a una parábola con vértice en el origen y eje paralelo a alguno de los coordenados

- *obtener* una ecuación de una parábola con eje paralelo a uno de los coordenados y vértice en el origen, dada la información suficiente

- *obtener* los siguientes elementos de una parábola dada por una ecuación de alguna de las formas: $y^2 = \pm 4px$ o $x^2 = \pm 4py$:

  — gráfica cartesiana
  — vértice
  — foco
  — ecuación del eje
  — una ecuación de la directriz
  — lado recto

6.3

Ecuación de una parábola con vértice en un punto cualquiera

57

Recordemos que para establecer una ecuación de una circunferencia con centro en un punto cualquiera del plano[C = (h, k)] a partir de la ecuación de una circunferencia con centro en el origen

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Efectuamos la operación siguiente:

└_____┘

y obtenemos: └_____┘

- sustituimos x por (x − h) y y por (y − k)
- $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

58

De manera similar, hemos visto que podemos obtener la ecuación de una elipse (horizontal o vertical) con centro en un punto C = (h, k).

Elipse horizontal con centro en el origen: └_____┘

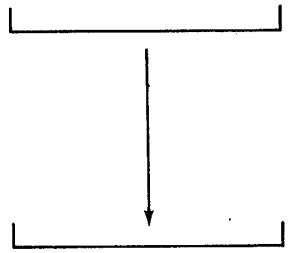
Elipse horizontal con el centro en un punto cualquiera C = (h, k): └_____┘

- $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- $\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$

59

Elipse vertical con centro en el origen:

Elipse vertical con centro en un punto cualquiera C = (h, k)



- $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

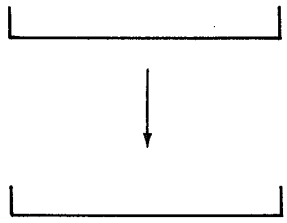
- $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

60

También, para una hipérbola:

Hipérbola horizontal con centro en el origen:

Hipérbola horizontal con centro en un punto cualquiera C = (h, k)



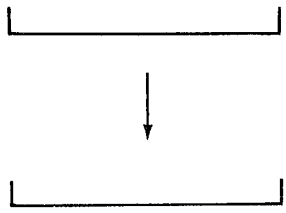
- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

61

Hipérbola vertical con centro en el origen:

Hipérbola vertical con centro en un punto cualquiera, C = (h, k)



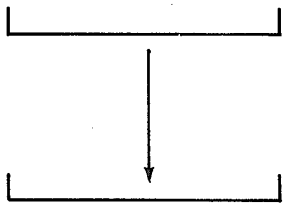
- $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

- $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

62

Procediendo de manera similar, tenemos las siguientes ecuaciones para la parábola.

Parábola horizontal con vértice en el origen:



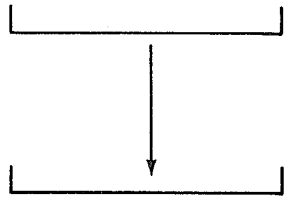
- $y^2 = \pm 4px$

Parábola horizontal con vértice en un punto cualquiera $V = (h, k)$

- $(y - k)^2 = \pm 4p\,(x - h)$

63

Parábola vertical con vértice en el origen:



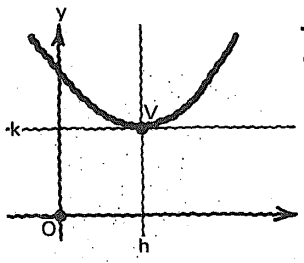
- $x^2 = \pm 4py$

Parábola vertical con vértice en un punto cualquiera $V = (h, k)$

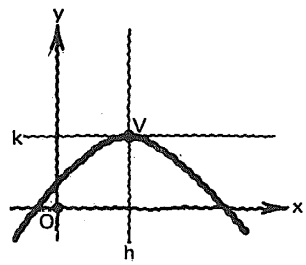
- $(x - h)^2 = \pm 4p\,(y - k)$

64

Resumiendo.

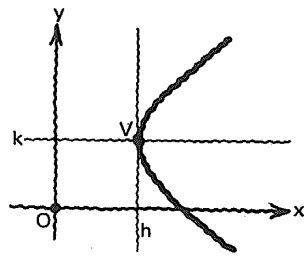


$(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$

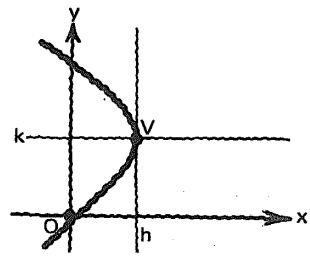


$(x - h)^2 = -4p\,(y - k)$

$h, k \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{R}^+$



$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$



$(y - k)^2 = -4p\,(x - h)$

65

Nótese que
estamos restringiendo el dominio de p
a $\mathcal{R}^+$.
Veamos qué pasa, por ejemplo, con la parábola

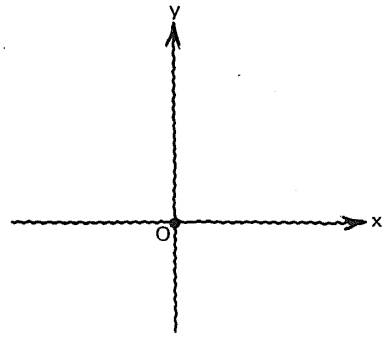
$$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$$

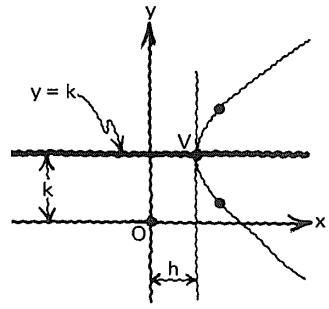
cuando p = 0:

$(y - k)^2 = 0$
$y - k = 0$ (ó $y = k$)

66

Veamos gráficamente lo anterior
y anotemos las conclusiones.





Si p = 0
la ecuación $(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$
representa una recta, que es
precisamente el eje de cualquiera
de las parábolas horizontales con
vértice en V = (h, k).

67

Por otra parte,
estamos considerando a **p**
como una distancia no dirigida,
tal como las constantes

a, b, c, r

de las cónicas antes estudiadas.

Por lo tanto, el dominio de p es $\mathcal{R}^+$

68

El vértice de una parábola es (4, 3)
y el foco = ($^{11}/_{2}$, 3).
Dar una ecuación de la parábola,
su gráfica cartesiana, ecuaciones
del eje y la directriz, y el
lado recto.

69

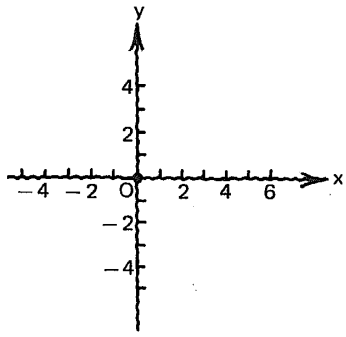
La parábola es:

horizontal

abierta a la derecha ☐
abierta a la izquierda ☐

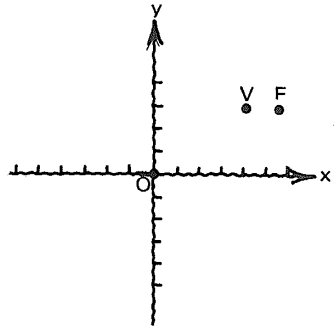
vertical

abierta hacia arriba ☐
abierta hacia abajo ☐



trazar el vértice y el foco.

horizontal
abierta a la derecha



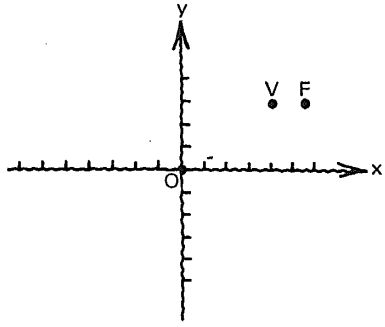
70

El eje de la parábola
es una recta paralela a

[ ]

y una de sus ecuaciones es

[ ]



el eje de las x

y = 3 (ó y − 3 = 0)

71

Expresión general de la ecuación requerida: ____

$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$

72

$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$

Datos: • V = ____ { • h = ____ • k = ____ • p = ____

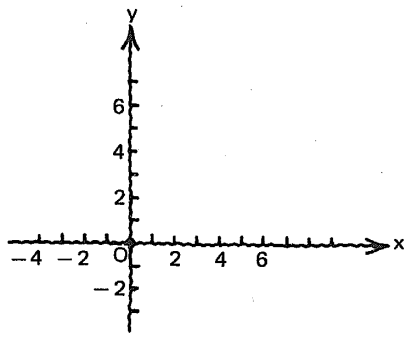
• (4,3) { • 4 • 3 • $\frac{3}{2}$ $(\frac{11}{2} - 4)$

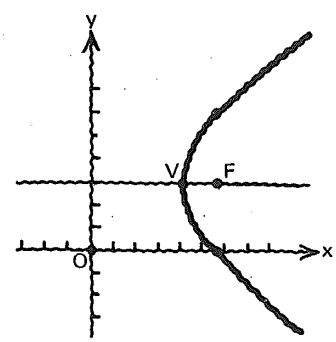
Ecuación requerida: ____

$(y - 3)^2 = 4(\frac{3}{2})(x - 4)$
o
• $(y - 3)^2 = 6(x - 4)$

73

Gráfica cartesiana de $(y - 3)^2 = 6(x - 4)$.

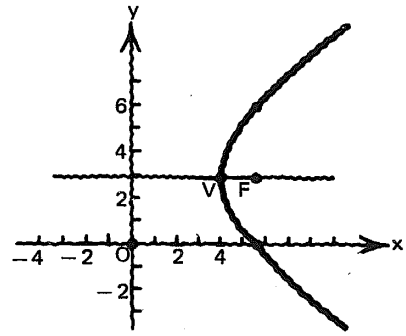




74

Una ecuación del eje:

Una ecuación de la directriz:



- $y = 3$ (ó $y - 3 = 0$)

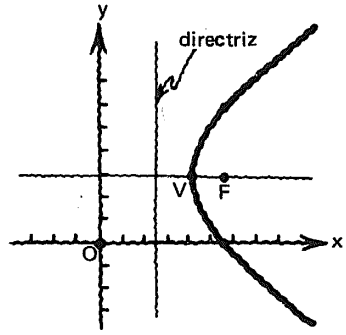
- $x = \frac{5}{2}$ (ó $x - \frac{5}{2} = 0$ ó $2x - 5 = 0$)

75

Lado recto:

$lr =$ ____ $=$ ____

expresión general



$4p = 4\left(\frac{3}{2}\right) = 6$

76

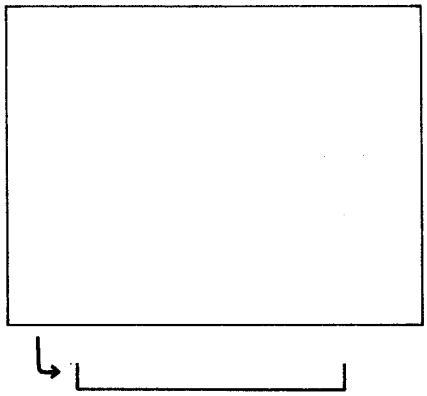
Vamos, ahora,
a determinar
los puntos de intersección
de la parábola

$$(y - 3)^2 = 6(x - 4)$$

con los ejes coordenados.

77

Intersecciones con el eje de las y:



Para $x = 0$:

$(y - 3)^2 = -24$

$\downarrow$

$y^2 - 6y + 33 = 0$

$\downarrow$

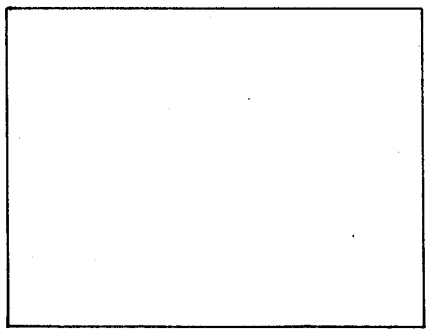
$y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 132}}{2}$

= números reales no definidos

- la parábola no interseca al eje de las y.

78

Intersecciones con el eje de las x.



Para $y = 0$:

$9 = 6(x - 4)$

$\downarrow$

$x = \frac{33}{6} = \frac{11}{2}$

- $I = (11/2, 0)$
  Verificar en la gráfica.

79

El foco de una parábola es (5, 0)
y una ecuación de la directriz es $x + 5 = 0$.

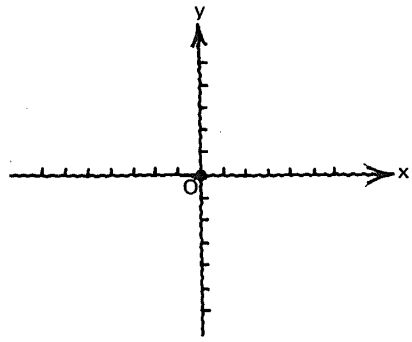
Dar:

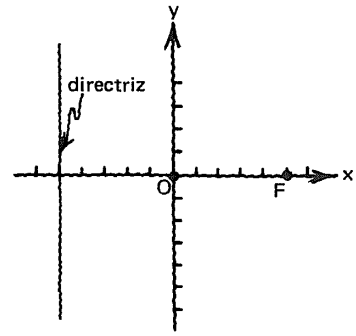
1. una ecuación de la parábola
2. su gráfica cartesiana
3. el vértice
4. una ecuación del eje
5. el lado recto
6. las intersecciones de la parábola con los ejes coordenados

80

Empecemos por trazar el foco y la directriz.

Foco F = (5, 0).
Directriz x + 5 = 0.

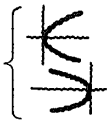


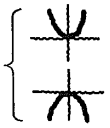


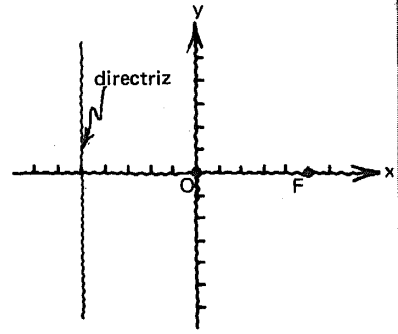
81

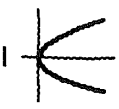
Señalar la opción correcta.

la parábola es:

horizontal  ☐ ☐

vertical  ☐ ☐

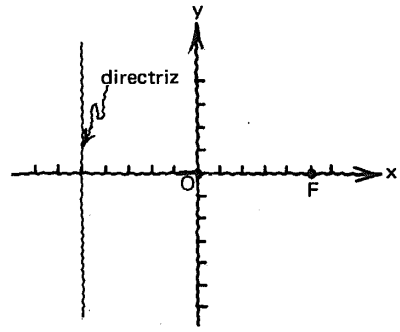


horizontal 

82

El vértice es el punto
V = [ ]
por lo tanto,
la expresión general
de la ecuación solicitada
es

[ ]



(0, 0)

$y^2 = 4px$

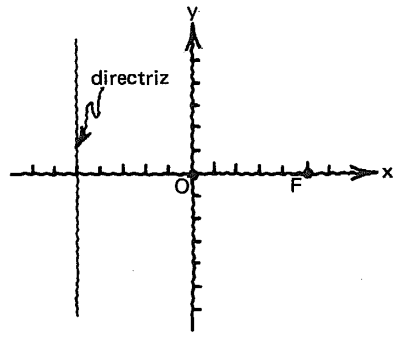
83

Expresión general de la ecuación:

$y^2 = 4px.$

Dato: p = [ ]

1. Ecuación requerida: [ ]



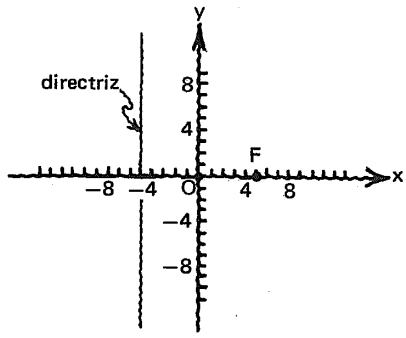
5

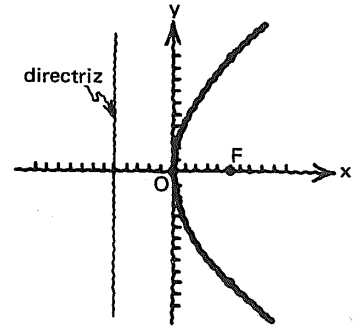
$y^2 = 20x$

84

Completemos la gráfica cartesiana de la parábola

$y^2 = 20x.$





85

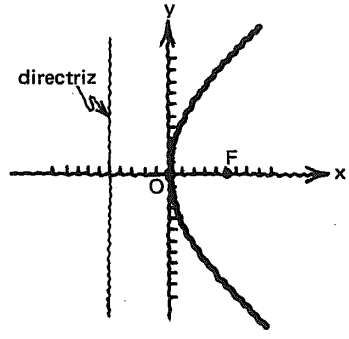
Una ecuación del eje:

[ ]

Lado recto:

lr = [ ] = [ ]

↑ expresión general

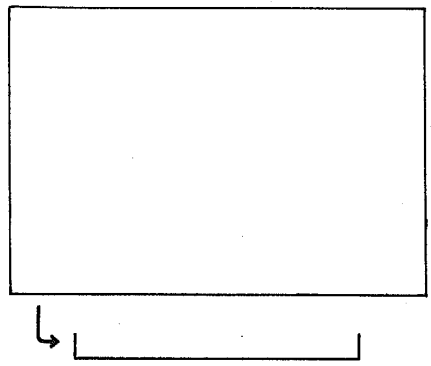


y = 0

4p = 20

86

Intersecciones de la parábola $y^2 = 20x$ con el eje de las y.

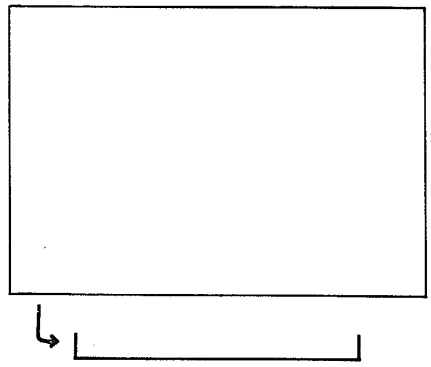


Para $x = 0$.
$y^2 = 0$
de donde:
$y = 0$

● $I = (0, 0)$

87

Intersecciones de la parábola $y^2 = 20x$ con el eje de las x.



Para $y = 0$:
$0 = 20x$
de donde:
$x = 0$

● $I = (0, 0)$

88

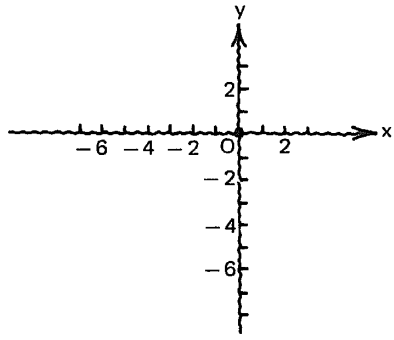
Obtener una ecuación de la parábola horizontal cuyo foco es el punto

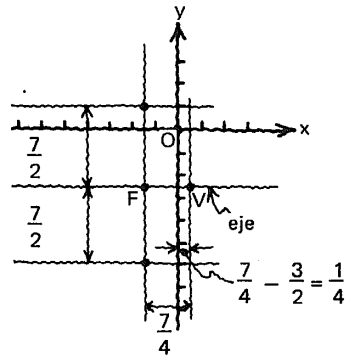
$F = (-\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$,

abre hacia la izquierda, y su lado recto mide 7.

89

Hagamos la representación gráfica de los datos.



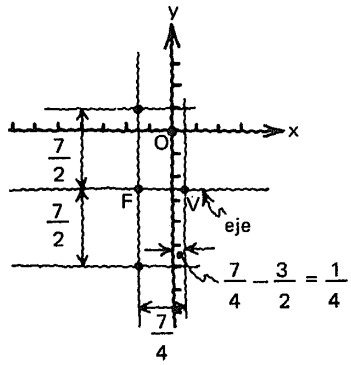


90

Expresión general de la ecuación: ____

Datos:

Ecuación requerida. ____



- $(y - k)^2 = -4p\,(x - h)$

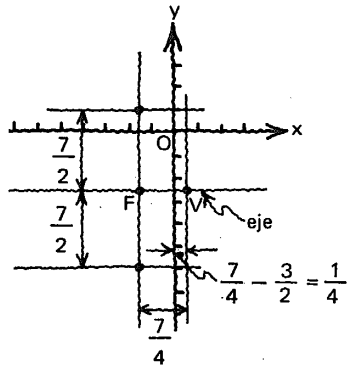
$h = \frac{1}{4}$
$k = -\frac{5}{2}$
$p = \frac{7}{4}$

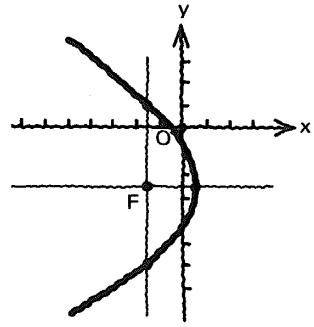
- $\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = -7\left(x - \frac{1}{4}\right)$

91

Completar la gráfica cartesiana de la parábola

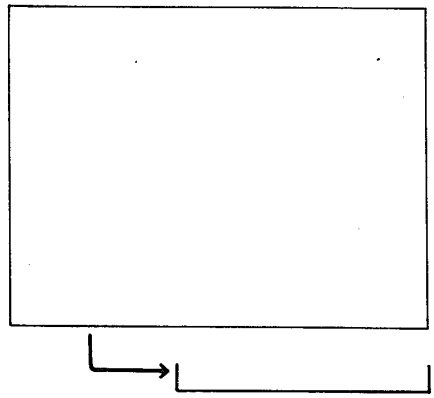
$\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = -7\left(x - \frac{1}{4}\right)$





92

Intersecciones de la parábola $(y + \frac{5}{2})^2 = -7(x - \frac{1}{4})$ con el eje de las x.



Para $y = 0$:

$\frac{25}{4} = -7(x - \frac{1}{4})$

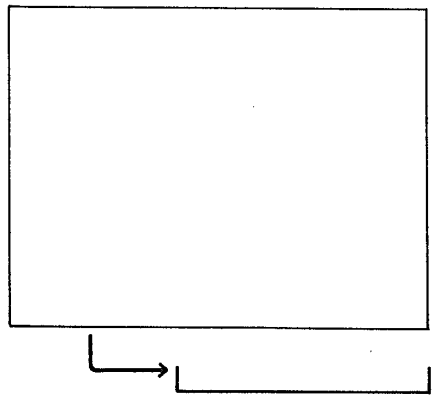
$\downarrow$

$x = -\frac{9}{14}$

$I = (-\frac{9}{14}, 0)$

93

Intersecciones de la parábola $(y + \frac{5}{2})^2 = -7(x - \frac{1}{4})$ con el eje de las y.



Para $x = 0$:

$(y + \frac{5}{2})^2 = \frac{7}{4}$

$\downarrow$

$2y^2 + 10y + 9 = 0$

$\downarrow$

$y = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 72}}{4}$

$y = \frac{-10 \pm 2\sqrt{7}}{4}$

$y_1 \doteq -1.18$

$y_2 \doteq -3.82$

- $\begin{cases} I_1 \doteq (0, -1.18) \\ I_2 \doteq (0, -3.82) \end{cases}$

6.6.3.1

Práctica adicional,
si se considera necesario.

94

Señalar la opción correcta

La ecuación

$$(x + 1)^2 = -9(y - 2)$$

representa una parábola

horizontal
- abierta a la derecha ☐
- abierta a la izquierda ☐

vertical
- abierta hacia arriba ☐
- abierta hacia abajo ☐

vertical abierta hacia abajo

95

El vértice de la parábola representada por la ecuación

$$(x + 1)^2 = -9(y - 2)$$

es el punto [_____]

(– 1, 2)

96

$$(x + 1)^2 = -9(y - 2)$$

La distancia del vértice al foco es igual a [____] $\frac{9}{4}$

La distancia del vértice a la directriz es igual a [____] $\frac{9}{4}$

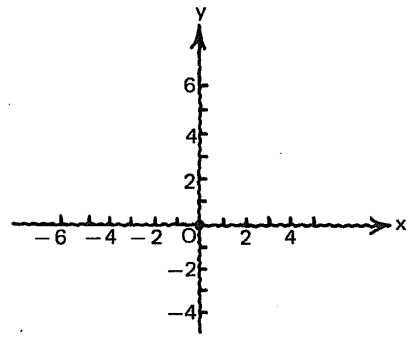
El lado recto es igual a [_____] 9

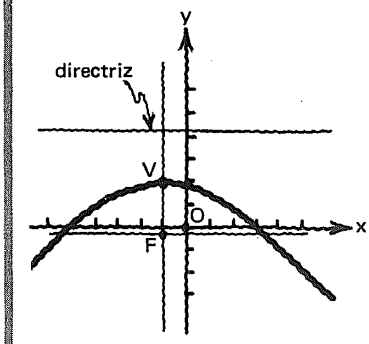
97

Gráfica cartesiana
correspondiente
a la ecuación

$(x + 1)^2 = -9(y - 2)$

trazando el foco y
la directriz de la parábola.





98

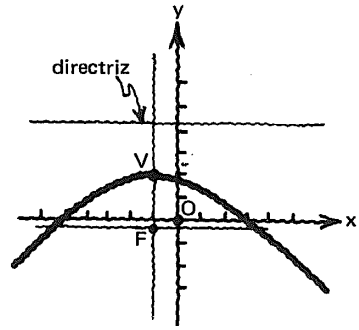
Foco F = ⌊_____⌋

Una ecuación del eje:

⌊_____⌋

Una ecuación de la directriz:

⌊_____⌋



$\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$

$x = -1$ (ó $x + 1 = 0$)

$y = \frac{17}{4}$ (ó $y - \frac{17}{4} = 0$
ó $4y - 17 = 0$)

6.6.3.2

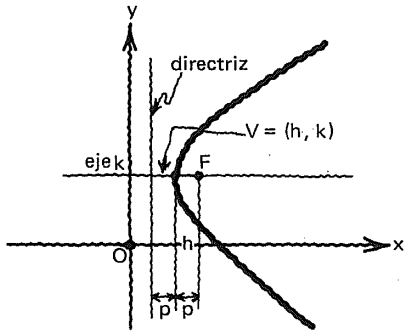
Práctica adicional,
si se considera necesario.

99

Para la parábola

$(y - k)^2 = 4p\,(x - h)$

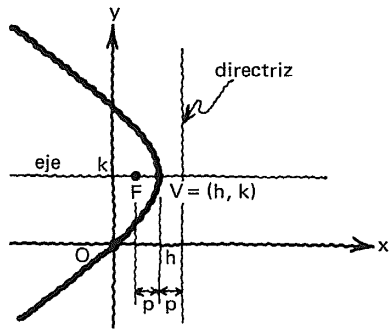
El vértice es el punto
V = [ ].
El foco es F = [ ].
Una ecuación del eje es:
[ ]
Una ecuación de la directriz es:
[ ]



- (h, k)
- (h + p, k)
- y = k (o y − k = 0)
- x = h − p (ó x − h + p = 0)

100

Una ecuación de la parábola representada es:
[ ]
Su vértice es: V = [ ]
Su foco es: F = [ ]
Una ecuación del eje es:
[ ]
Una ecuación de la directriz:
[ ]



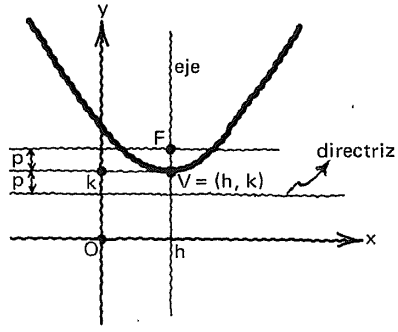
- $(y - k)^2 = -4p\,(x - h)$
- (h, k)
- (h − p, k)
- y = k (ó y − k = 0)
- x = h + p (ó x − h − p = 0)

101

Una ecuación de la parábola representada es:
[ ]

Vértice V = [ ]
Foco F = [ ]
Una ecuación del eje:
[ ]

Una ecuación de la directriz:
[ ]



- $(x - h)^2 = 4p\,(y - k)$
- (h, k)
- (h, k + p)
- x = h (ó x − h = 0)
- y = k − p (ó y − k + p = 0)

102

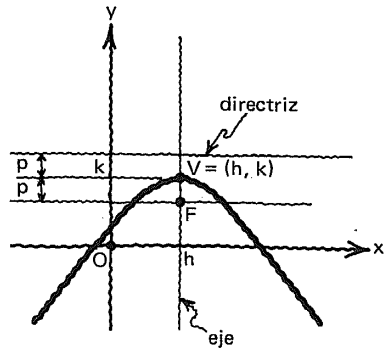
Una ecuación de la parábola representada es:

Vértice V =

Foco F =

Una ecuación del eje:

Una ecuación de la directriz:



$(x - h)^2 = -4p\,(y - k)$

(h, k)

(h, k – p)

$x = h$ (ó $x - h = 0$)

$y = k + p$ (ó $y - k - p = 0$)

6.6.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *obtener* una ecuación de la forma ordinaria para una parábola con eje paralelo a uno de los coordenados, dada la información suficiente;
- *obtener* los elementos de una parábola con su eje paralelo a uno de los ejes coordenados, a partir de una de sus ecuaciones dada en la forma ordinaria.

6.4

Ecuación general de una parábola

103

Una ecuación de alguna de las formas estudiadas puede ser transformada en una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

104

Sea la ecuación

$$(y - 3)^2 = 6(x - 4)$$

que deseamos transformar en una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

105

Estado inicial: $(y-3)^2 = 6(x-4)$

1. Sumar a ambos miembros el inverso aditivo del segundo miembro.

↓

Estado intermedio 1: _____

$(y-3)^2 - 6(x-4) = 0$

106

Estado intermedio 1: $(y-3)^2 - 6(x-4) = 0$

2. Efectuar las operaciones indicadas en el primer miembro.

↓

Estado intermedio 2: _____

$y^2 - 6y + 9 - 6x + 24 = 0$

107

Estado intermedio 2: $y^2 - 6y + 9 - 6x + 24 = 0$

3. Ordenar conforme al modelo.

Estado final: _____

$y^2 - 6x - 6y + 33 = 0$

Modelo del estado final: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

108

Estudiemos con atención.

Estado inicial:	$(y-3)^2 = 6(x-4)$
Estado intermedio 1:	$(y-3)^2 - 6(x-4) = 0$
Estado intermedio 2:	$y^2 - 6y + 9 - 6x + 24 = 0$
Estado final:	$y^2 - 6x - 6y + 33 = 0$
Modelo del estado final:	$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

109

$(y-3)^2 = 6(x-4)$

representa una parábola

horizontal/vertical

horizontal

y al ser llevada a la forma

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

encontramos que A = [_____]

0

110

Sea, ahora, la ecuación

$(x+1)^2 = -9(y-2)$

que vamos a llevar a la forma

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

111

Estado inicial: $(x + 1)^2 = -9(y - 2)$

Estado intermedio 1: ⌊ ⌋

Estado intermedio 2: ⌊ ⌋

Estado final: ⌊ ⌋

Modelo del estado final: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

- $(x + 1)^2 + 9(y - 2) = 0$
- $x^2 + 2x + 1 + 9y - 18 = 0$
- $x^2 + 2x + 9y - 17 = 0$

112

La ecuación

$$(x + 1)^2 = -9(y - 2)$$

representa una parábola

horizontal/vertical

y al ser puesta en la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

encontramos que ⌊ ⌋

vertical

$C = 0$

113

$(y - 3)^2 = 6(x - 4)$ ↓ • representa parábola horizontal

$(x + 1)^2 = -9(y - 2)$ ↓ • representa parábola vertical

• y al ser llevada a la forma

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$A = 0$ $C = 0$

¿Sucede siempre esto para cualquier parábola horizontal o vertical?

Intentar responder y luego ver cuadro siguiente.

114

Llevemos las ecuaciones

$(x-h)^2 = \pm 4p\,(y-k)$ y $(y-k)^2 = \pm 4p\,(x-h)$

a la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

115

Estado inicial: $(x-h)^2 = \pm 4p\,(y-k)$

Estado intermedio 1:

Estado intermedio 2:

Estado final:

Modelo del estado final: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

- $(x-h)^2 \mp 4p\,(y-k) = 0$
- $x^2 - 2hx + h^2 \mp 4py \pm 4pk = 0$
- $x^2 - 2hx \mp 4py + h^2 \pm 4pk = 0$

116

Para una **parábola vertical:**

$$(x-h)^2 = \pm 4p\,(y-k)$$

$$x^2 - 2hx \mp 4py + h^2 \pm 4pk = 0$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \rightarrow \boxed{C = 0}$$

117

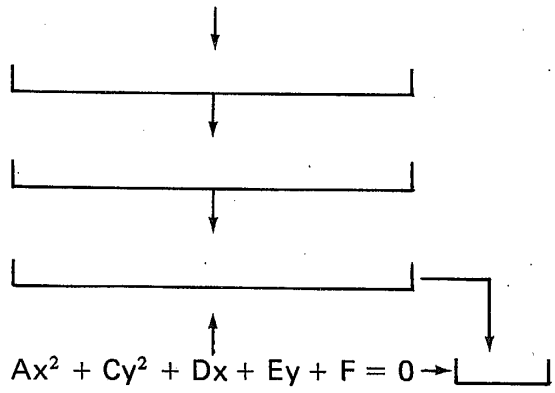
Estado inicial:

Estado intermedio 1:

Estado intermedio 2:

Estado final:

Modelo del estado final: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$



- $(y - k)^2 \mp 4p\,(x - h) = 0$
- $y^2 - 2ky + k^2 \mp 4px \pm 4ph = 0$
- $y^2 \mp 4px - 2ky + k^2 \pm 4ph = 0$
- $A = 0$

118

Para una **parábola horizontal.**

$$(y - k)^2 = \pm 4p\,(x - h)$$

$$\downarrow$$

$$y^2 \mp 4px - 2ky + k^2 \pm 4ph = 0$$

$$\downarrow$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \rightarrow \boxed{A = 0}$$

119

Para que una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

represente una parábola se requiere que:

$$A = 0 \ \underline{V} \ C = 0^*$$

- Si $A = 0$ la parábola representada es **vertical/horizontal**
- Si $C = 0$ la parábola representada es **vertical/horizontal**

horizontal

vertical

* $A = 0 \ \underline{V} \ C = 0$ es una disyunción exclusiva y debe interpretarse como:
o $A = 0$ o $C = 0$, pero no $A = C = 0$

6.6.4.1

Práctica adicional de transformación de una ecuación de alguna de las formas

$(y-k)^2 = \pm 4p\,(x-h)$ o $(x-h)^2 = \pm 4p\,(y-k)$

en una ecuación de la forma:

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

con $A = 0 \veebar C = 0$,

si se considera necesario.

120

Vamos, ahora,
a transformar
una ecuación de la forma

$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
con $A = 0 \veebar C = \mathbf{0}$

en una ecuación de alguna de las formas

$(y-k)^2 = \pm 4p\,(x-h)$ o $(x-h)^2 = \pm 4p\,(y-k)$

121

Sea la ecuación

$y^2 - 8x + 10y + 41 = 0$

que vamos a poner en alguna de las formas:

$(y-k)^2 = \pm 4p\,(x-h)$ o $(x-h)^2 = \pm 4p\,(y-k)$

¿Podríamos decir en cuál de estas dos formas?

$(y-k)^2 = \pm 4p\,(x-h)$

122

Sabemos que si

$$y^2 - 8x + 10y + 41 = 0$$

representa una parábola,
dicha parábola es

vertical/horizontal.

horizontal

123

Estado
inicial: $y^2 - 8x + 10y + 41 = 0$

1. Agrupar los términos en **x**, los términos en **y** y los términos independientes.

Estado
intermedio 1: $y^2 + 10y - 8x + 41 = 0$

124

Estado
intermedio 1: $y^2 + 10y - 8x + 41 = 0$

2. Expresar el binomio en **y** como un producto de dos factores, uno de los cuales es el coeficiente de y^2, si este es diferente de 1.*

Estado
intermedio 2: $y^2 + 10y - 8x + 41 = 0$

* Intercambiar las variables **x** y **y** si $C = 0$ y $A \neq 0$

125

Estado
intermedio 2: $y^2 + 10y - 8x + 41 = 0$

3. Completar el trinomio cuadrado perfecto en **y** y pasar al segundo miembro los términos restantes, reduciendo los que sean semejantes.

Estado
intermedio 3: ⌊_____⌋

$y^2 + 10y + 25 = 8x - 16$

126

Estado
intermedio 3: $y^2 + 10y + 25 = 8x - 16$

4. Factorizar el trinomio cuadrado perfecto del primer miembro, y además el binomio del segundo miembro, de tal manera que uno de los factores sea el coeficiente de **x.**

Estado
intermedio 4: ⌊_____⌋

$(y + 5)^2 = 8\,(x - 2)$

127

Estado
intermedio 4: $(y + 5)^2 = 8(x - 2)$

5. Dividir ambos miembros entre el coeficiente del binomio cuadrático del primer miembro.

Estado
final: ⌊_____⌋

En este caso el coeficiente del binomio cuadrático del primer miembro es igual a 1.

$(y + 5)^2 = 8(x - 2)$

128

Estudiar con atención.

Estado inicial: $y^2 - 8x + 10y + 41 = 0$

Estado intermedio 1: $y^2 + 10y - 8x + 41 = 0$

Estado intermedio 2: $y^2 + 10y - 8x + 41 = 0$

Estado intermedio 3: $y^2 + 10y + 25 = 8x - 16$

Estado intermedio 4: $(y + 5)^2 = 8(x - 2)$

Estado final: $(y + 5)^2 = 8(x - 2)$

Modelo del estado final: $(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$

129

Otro ejemplo:

Estado inicial: $8x^2 - 8x + 20y + 17 = 0$

Modelo del estado final: _____

$(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$

130

Estado inicial: $8x^2 - 8x + 20y + 17 = 0$

Estado intermedio 1: ↓

$8x^2 - 8x + 20y + 17 = 0$

131

Estado intermedio 1: $8x^2 - 8x + 20y + 17 = 0$

Estado intermedio 2: ↓

$8(x^2 - x) + 20y + 17 = 0$

132

Estado intermedio 2: $8(x^2 - x) + 20y + 17 = 0$

Estado intermedio 3: ↓

$8\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -20y - 17 + 2$

o

$8\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -20y - 15$

133

Estado intermedio 3: $8\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) = -20y - 15$

Estado intermedio 4:

$8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -20\left(y + \frac{15}{20}\right)$
o
$8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -20\left(y + \frac{3}{4}\right)$

134

Estado intermedio 4: $8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -20\left(y + \frac{3}{4}\right)$

Estado final:

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{20}{8}\left(y + \frac{3}{4}\right)$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{5}{2}\left(y + \frac{3}{4}\right)$

135

Estudiar con atención.

Estado inicial: $8x^2 - 8x + 20y + 17 = 0$

Estado intermedio 1: $8x^2 - 8x + 20y + 17 = 0$

Estado intermedio 2: $8(x^2 - x) + 20y + 17 = 0$

Estado intermedio 3: $8(x^2 - x + \frac{1}{4}) = -20y - 15$

Continúa en el cuadro siguiente.

136

Estado intermedio 4: $8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \overset{\downarrow}{-}\ 20\left(y+\frac{3}{4}\right)$

Estado final: $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \overset{\downarrow}{-}\ \frac{5}{2}\left(y+\frac{3}{4}\right)$

Modelo del estado final: $(x-h)^2 = \overset{\uparrow}{\pm}\ 4p\,(y-k)$

137

Escrita la ecuación $8x^2 - 8x + 20y + 17 = 0$

así $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{5}{2}\left(y+\frac{3}{4}\right)$

estamos en condiciones de dar todos los elementos de la parábola.

6.6.4.2

Práctica adicional de transformación de una ecuación de la forma:
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A = 0$ $\underline{V}$ $C = 0$
en una ecuación de alguna de las formas $(x-h)^2 = \pm 4p\,(y-k)$
o $(y-k)^2 = \pm 4p\,(x-h)$

si se considera necesario.

6.6.4.3

Práctica de obtención de los elementos de una parábola, dada una de sus ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A = 0$ $\underline{V}$ $C = 0$,

si se considera necesario.

138

Se requiere expresar la ecuación

$$4y^2 - 9x + 18 = 0$$

en la forma

$$(y - k)^2 = \pm 4p\,(x - h)$$

139

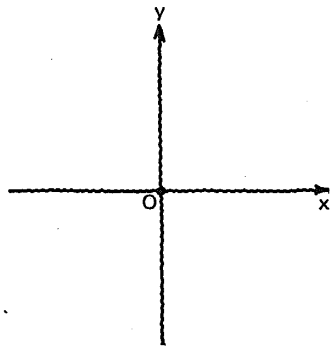
Estado inicial: $4y^2 - 9x + 18 = 0$

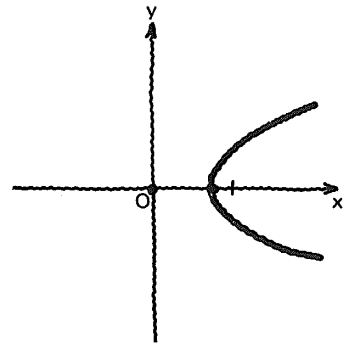
Estado final: $(y - k)^2 = \pm 4p\,(x - h)$

- $4y^2 - 9x + 18 = 0$
- $4y^2 - 9x + 18 = 0$
- $4y^2 = 9x - 18$
- $4y^2 = 9(x - 2)$
- $y^2 = \frac{9}{4}(x - 2)$

140

Gráfica cartesiana de $y^2 = \frac{9}{4}(x - 2)$.





141

Ahora;

Estado inicial:

$4x^2 - 12x - 11 = 0$

Estado final:

$(x - h)^2 = \pm 4p\,(y - k)$

- $4x^2 - 12x - 11 = 0$
- $4(x^2 - 3x) - 11 = 0$
- $4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) = 20$
- $4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 20$
- $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5$

142

$$4x^2 - 12x - 11 = 0$$
$$\downarrow$$
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 5$$

¿Representan las ecuaciones anteriores una parábola?

Sí/No

No

143

Nos preguntamos:
qué conjunto de puntos
en el plano cartesiano
representa la ecuación

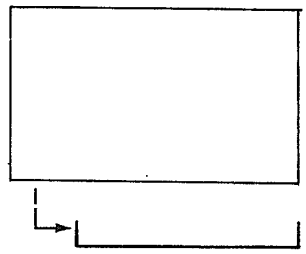
$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 = 5.$$

144

$$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 = 5$$

Intentemos expresar
esta ecuación
en la forma

$x = a.$



$$x-\tfrac{3}{2} = \pm\sqrt{5}$$

$$x = \pm\sqrt{5}+\tfrac{3}{2}$$

$$x_1 = \sqrt{5}+\tfrac{3}{2} \doteq 3.74$$

o

$$x_2 = -\sqrt{5}+\tfrac{3}{2} \doteq -0.74$$

145

Hagamos la representación
gráfica de:

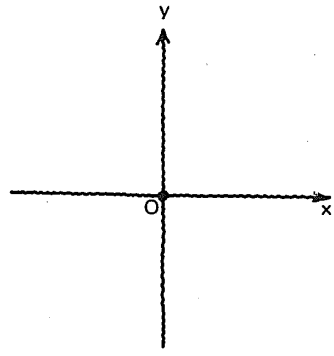
$4x^2 - 12x - 11 = 0$

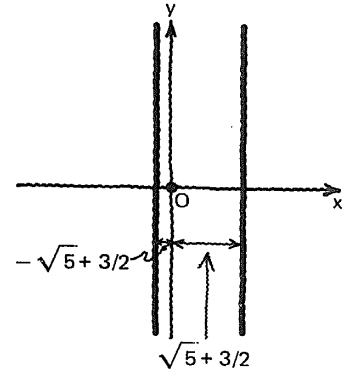
o

$\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2 = 5$

o

$x = \sqrt{5}+\tfrac{3}{2}$ V $x = -\sqrt{5}+\tfrac{3}{2}$





Dos rectas paralelas
al eje y

146

Otra ecuación.

Estado inicial:

$9x^2 + 6x + 1 = 0$

↓

Estado final:

$(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$

- $9x^2 + 6x + 1 = 0$
- $9\left(x^2 + \frac{2}{3}x\right) + 1 = 0$
- $9\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) = 0$
- $9\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$
- $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$

147

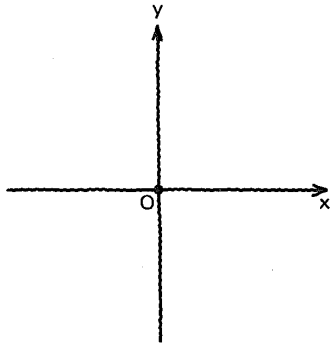
La ecuación

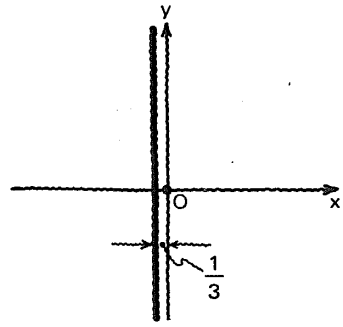
$9x^2 + 6x + 1 = 0$

o

$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = 0$

representa,
en el plano cartesiano,





una recta paralela al eje y

148

Una ecuación más.

Estado inicial:

$5y^2 + 3y + 1 = 0$

↓

Estado final:

$(y - k)^2 = \pm 4p(x - h)$

- $5y^2 + 3y + 1 = 0$
- $5(y^2 + \frac{3}{5}y) + 1 = 0$
- $5\left(y^2 + \frac{3}{5}y + \frac{9}{100}\right) = -\frac{11}{20}$
- $5\left(y + \frac{3}{10}\right)^2 = -\frac{11}{20}$
- $\left(y + \frac{3}{10}\right)^2 = -\frac{11}{100}$

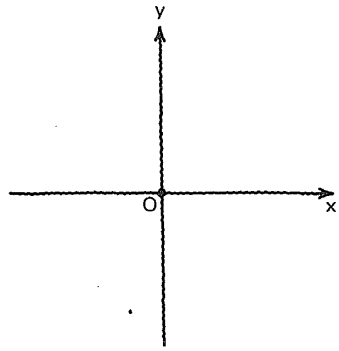
149

La ecuación
$5y^2 + 3y + 1 = 0$

o

$\left(y + \frac{3}{10}\right)^2 = -\frac{11}{100}$

representa,
en el plano cartesiano,



$y + \frac{3}{10} = \pm\sqrt{-\frac{11}{100}} = \pm\frac{1}{10}\sqrt{-11}$

$y = \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{10}$

= números reales no definidos

- ningún conjunto de puntos

150

Atención.

En resumen,
una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

con $\left[\begin{array}{l} A, C, D, E, F \in \mathbb{R} \\ A = 0 \wedge C \neq 0 \\ \text{o} \\ C = 0 \wedge A \neq 0 \end{array}\right]$

puede representar:

- una parábola con su eje paralelo a uno de los ejes coordenados,
- dos rectas paralelas,
- una recta, o
- ningún conjunto de puntos en el plano cartesiano.

6.6.4.4

Práctica de
determinación del conjunto de puntos
representado por una ecuación
de la forma
$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$,
con $(A = 0 \wedge C \neq 0)$ o $(C = 0 \wedge A \neq 0)$

si se considera necesario.

6.6.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *transformar* una ecuación de alguna de las formas:
  $(y - k)^2 = \pm 4p\,(x - h)$ o $(x - h)^2 = \pm 4p\,(y - k)$ en una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $(A = 0 \wedge C \neq 0)$ o $(C = 0 \wedge A \neq 0)$;

- *transformar* una ecuación de la forma:
  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
  con $(A = 0 \wedge C \neq 0)$ o $(C = 0 \wedge A \neq 0)$
  en una ecuación de alguna de las formas:
  $(y - k)^2 = \pm 4p\,(x - h)$ o $(x - h)^2 = \pm 4p\,(y - k)$;

- *obtener* los elementos de una parábola dada por una ecuación de la forma $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con $(A = 0 \wedge C \neq 0)$ o $(C = 0 \wedge A \neq 0)$:

- *determinar* el conjunto de puntos en el plano cartesiano, representado por una ecuación de la forma:
  $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
  con $(A = 0 \wedge C \neq 0)$ o $(C = 0 \wedge A \neq 0)$.

Esta obra se terminó de imprimir
el día 15 de agosto de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO EV KC 100

Bloque 6:

Geometría analítica

En los ocho *módulos de color morado* que forman el bloque 6, *Geometría analítica*, se amplían y formalizan los conceptos de relación, función y gráfica cartesiana. En el *módulo 1* se incluyen algunos conceptos y procedimientos elementales, tales como:

- Distancia entre dos puntos en el plano cartesiano
- División de un segmento rectilíneo según una razón dada
- Ángulo formado por dos rectas concurrentes
- Pendiente y ángulo de inclinación de una recta

Después, se conduce *paso a paso* al lector hacia la revisión de los lugares geométricos más comunes. Así, en el *módulo 2* se analiza la recta; en el *módulo 3*, la circunferencia; en el *módulo 4*, la elipse; en el *módulo 5*, la hipérbola, y en el *módulo 6*, la parábola.

Luego, con el estudio de las cónicas y la ecuación general de segundo grado, el cual se realiza en el *módulo 7*, se accede a la integración de un gran marco conceptual.

Dicho marco conceptual se amplía aún más en el *módulo 8*, donde se brindan los elementos necesarios para llevar a cabo el análisis de cualquier lugar geométrico del plano cartesiano.

Por último, las fórmulas y los conceptos fundamentales de todos los temas comprendidos en los módulos que integran este bloque, aparecen en el módulo de resumen llamado *Memo 6. Geometría analítica.*

Bloque	Módulo	Módulo de resumen
1 **ÁLGEBRA** ESTRUCTURAS Y OPERACIONES **Libros color café**	*1- Conjuntos* *2- Estructuras matemáticas* *3- El conjunto de los enteros* *4- Operaciones con enteros* *5- Lenguaje algebraico 1. Formación* *6- Lenguaje algebraico 2. Transformación* *7- Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división* *8- Operaciones con polinomios 2. Productos notables* *9- Operaciones con polinomios 3. Factorización* *10- El conjunto de los racionales* *11- Operaciones con expresiones racionales* *12- El conjunto de los reales* *13- Operaciones con expresiones reales* *14- El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones*	***MEMO 1*** *ÁLGEBRA. ESTRUCTURAS Y OPERACIONES*
2 **ÁLGEBRA** MODELOS **Libros color verde**	*1- La ecuación como modelo matemático* *2- Ecuaciones de primer grado* *3- Sistemas de ecuaciones de primer grado* *4- Desigualdades de primer grado* *5- Ecuaciones de segundo grado* *6- Desigualdades de segundo grado* *7- La relación como modelo matemático* *8- Funciones* *9- Funciones exponenciales* *10- Funciones logarítmicas* *11- Ecuaciones, desigualdades y sistemas. Soluciones gráficas* *12- Resolución de problemas*	***MEMO 2*** *ÁLGEBRA. MODELOS*
3 **NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA** **Libros color azul**	*1- Lógica proposicional 1. Proposiciones* *2- Lógica proposicional 2. Argumentos*	***MEMO 3*** *NOCIONES DE LÓGICA MATEMÁTICA*
4 **GEOMETRÍA EUCLIDIANA** **Libros color rojo**	*1- Conjuntos de puntos* *2- Relaciones binarias* *3- Figuras planas* *4- El aparato demostrativo. Ángulos y triángulos* *5- Polígonos convexos* *6- Relación de semejanza* *7- Geometría métrica en el plano* *8- Cuerpos geométricos*	***MEMO 4*** *GEOMETRÍA EUCLIDIANA*
5 **TRIGONOMETRÍA** **Libros color ocre**	*1- Las razones trigonométricas de un ángulo agudo* *2- Resolución de triángulos rectángulos* *3- El círculo trigonométrico* *4- Las funciones trigonométricas* *5- Las funciones trigonométricas inversas* *6- Identidades trigonométricas* *7- Resolución de triángulos cualesquiera* *8- Ecuaciones trigonométricas*	***MEMO 5*** *TRIGONOMETRÍA*
6 **GEOMETRÍA ANALÍTICA** **Libros color morado**	*1- Introducción a la geometría analítica* *2- La recta* *3- La circunferencia* *4- La elipse* *5- La hipérbola* ***6- La parábola*** *7- Las cónicas y la ecuación general de segundo grado* *8- Relaciones y lugares geométricos*	***MEMO 6*** *GEOMETRÍA ANALÍTICA*
7 **CÁLCULO DIFERENCIAL** **Libros color azul turquesa**	*1- Introducción al cálculo diferencial* *2- Límite de una función* *3- Continuidad de una función* *4- Derivación de funciones algebraicas* *5- Derivación de funciones trascendentes* *6- Extremos de una función (máximos y mínimos)*	***MEMO 7*** *CÁLCULO DIFERENCIAL*
8 **CÁLCULO INTEGRAL** **Libros color negro**	*1- Sumatoria y notación sigma* *2- La integral definida y la integral indefinida* *3- Integrales elementales* *4- Métodos de integración 1* *5- Métodos de integración 2* *6- Algunas aplicaciones del cálculo integral*	***MEMO 8*** *CÁLCULO INTEGRAL*

ISBN 968-24-0837-7